Fiche de cours
Étude de fonctions à l'ordinateur

Etienne Averlant

26 septembre 2024

1 Intro-tout ça

L'objectif du cours de maths de troisième technique est d'abord de jongler entre trois représentations différentes des mêmes objets ; ces trois objets mathématiques sont

1. la fonction
2. le tableau de valeurs
3. le graphique

Dans le cadre des fonctions affines[1], le cours sert déjà à passer de la fonction aux valeurs, du tableau au graphique, etc.

Les élèves doivent en outre être capables de reconnaître les tableaux de valeurs, fonctions et graphiques de deux fonctions de référence, $\sqrt{x}$ et $\frac{1}{x}$. Cette petite note sert à la fois de manuel pour faire des maths à l'ordinateur (5EQI) et d'illustration de ces fonctions (3TQS). C'est pour ça que l'étude de chaque fonction sera divisée en trois :

1. Des considérations générales de maths, pour tout le monde
2. Une partie technique, pour la culture générale, les compétences en informatique
3. Des jolies images dont on se souviendra de la forme pour le cours de maths de 3TS

Tipar

2 La fonction $\sqrt{x}$

2.1 Définition et domaine de définition

La fonction racine est la réciproque de la limitation de la fonction $x \to x^2$ à $\mathbf{R}^+$. C'est à dire que pour chaque nombre, la fonction $\sqrt{}$ va me renvoyer le nombre positif que j'aurais du mettre au carré pour arriver à l'argument de $\sqrt{}$. C'est à dire $\sqrt{9} = 3$ car $3^2 = 9$.

Du coup, puisque le carré d'un nombre est forcément positif, il me sera impossible d'avoir des arguments de la fonction $\sqrt{}$ négatifs : $\sqrt{-1}$ n'existe pas, $\sqrt{-12}$ non plus, etc. Par contre, $\sqrt{0} = 0$.

On notera donc :

$$\begin{aligned} \sqrt{} : \mathbf{R}^+ &\to \mathbf{R}^+ \\ x &\to \sqrt{x} \end{aligned}$$

2.2 Tableur et représentation graphique

Maintenant que nous avons notre fonction, on peut utiliser la calculatrice pour calculer chaque valeur de racine qu'on nous propose ! D'ailleurs, si on nous propose un résultat sans argument, on peut simplement calculer le carré :-)

Pour que ce soit bien lisible, on peut déja donner un nom à chacune de nos colonnes. ça nous permettra de nous y retrouver par après

---

1. c'est à dire de la forme $y = m \cdot x + p$

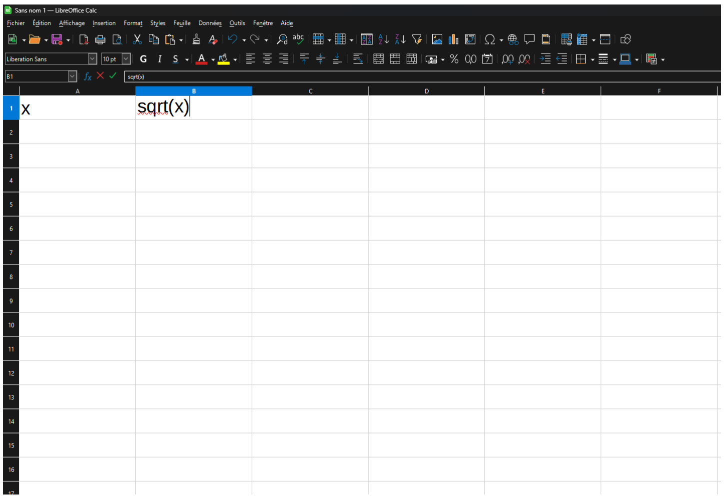

FIGURE 1 – donner un nom aux différentes colonnes

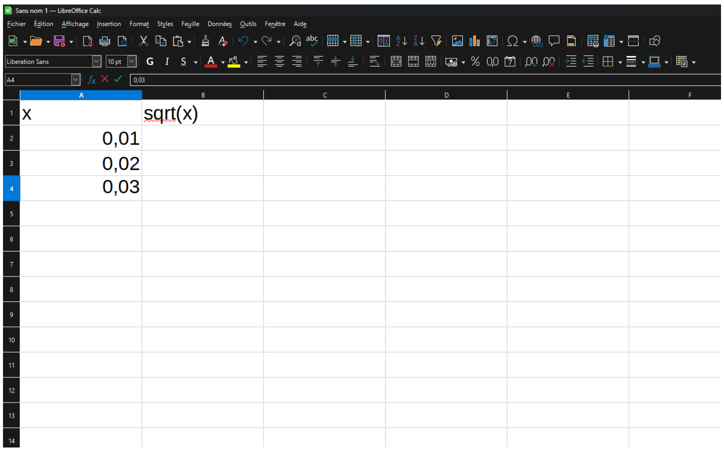

FIGURE 2 – Initialiser les variations de *x*

Ensuite, il va nous falloir générer un sacré paquet de *x* différents. On peut commencer à zéro, c'est une valeur acceptable, et on va se cantonner à x variant de 0 à 5. On veut de la précision pour notre ddessin, du coup on va demander à l'ordinateur 500 valeurs entre 0 et 5. ça fait un changement de 0.01 par case ! On commence donc avec 0.01, 0.02, 0.03, comme sur la figure 2

Ensuite, quel que soit le tableur utilisé, il convient de sélectionner les *x* déjà écrits, et faire glisser le coin inférieur droit de la sélection vers le bas, jusqu'à ce que la valeur 5 soit atteinte !

Maintenant, il faut dire à la deuxième colonne de calculer à chaque fois la racine de la première colonne. On tape simplement "=racine(" avant de cliquer sur la case qui nous intéresse Il nous suffit maintenant de double-cliquer sur le coin inférieur droit de la case B2 et, ayé, on a notre tableau de valeurs ! On peut donc maintenant sélectionner tout le tableau, appuyer sur "insertion-diagramme" Il convient maintenant de sélectionner "XY" et "lignes seules" et puis ayé

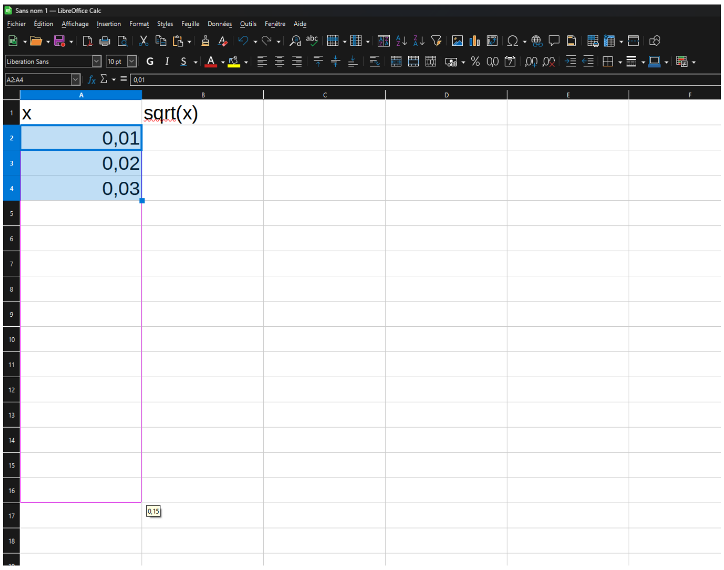

FIGURE 3 – blinder le tableau de x

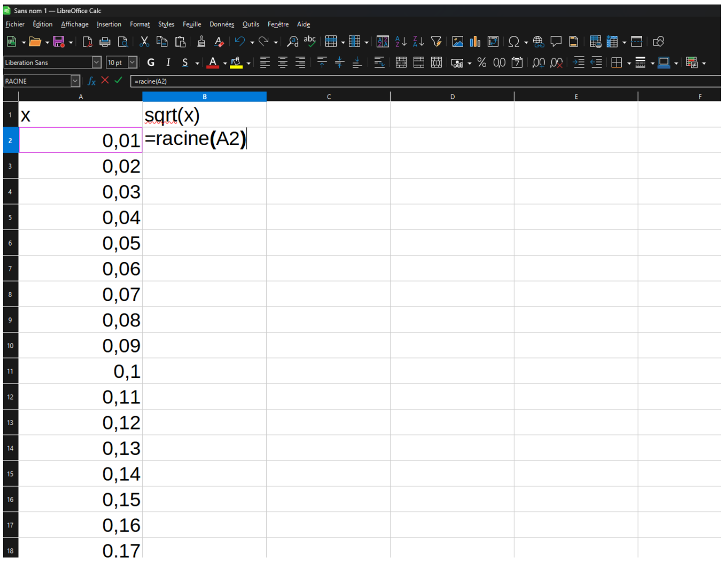

FIGURE 4 – Initialisation de la fonction racine

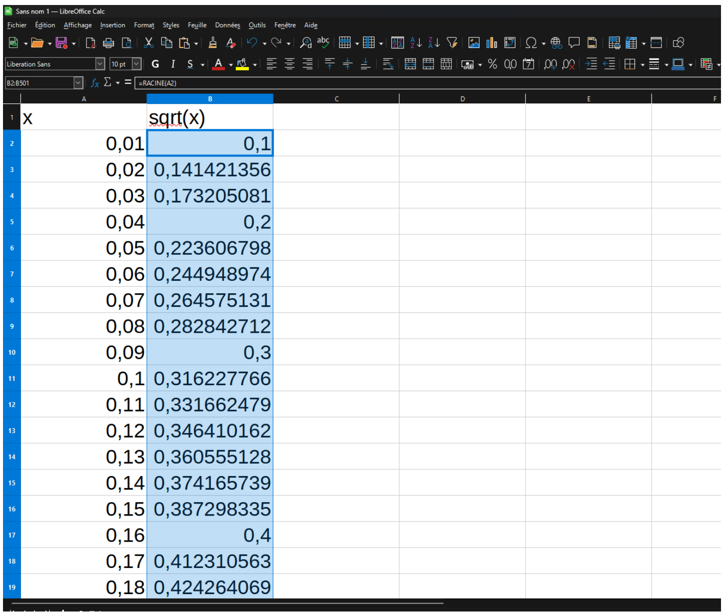

FIGURE 5 – Fonction racine

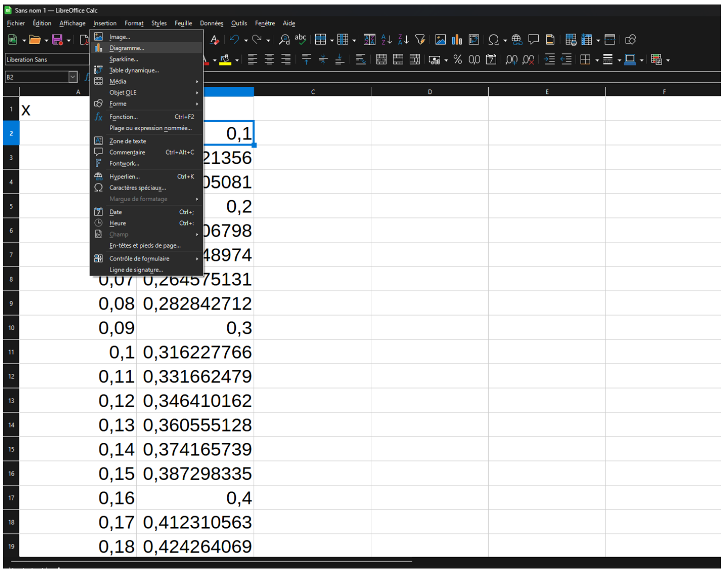

FIGURE 6 – Fonction racine

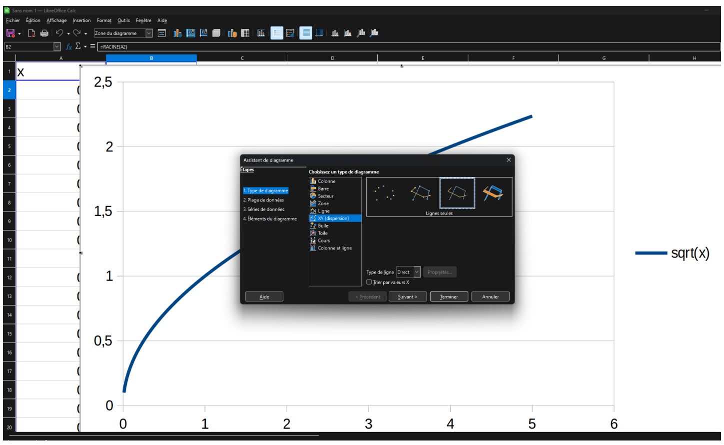

FIGURE 7 – Fonction racine

2.3 Fonction racine-représentation graphique

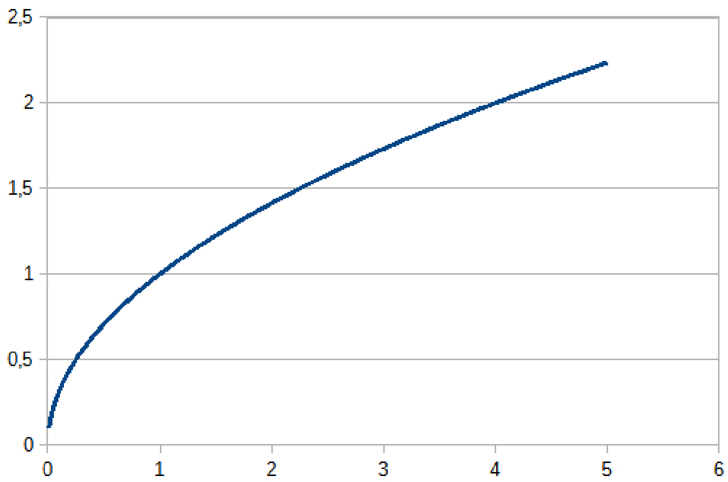

FIGURE 8 – Fonction racine, par LibreOfficeCalc

3 Fonction inverse

3.1 Pour tout le monde : propriétés de la fonction

3.1.1 Domaine de définition

Bon, quand j'ai appris les divisions, j'ai appris qu'on avait pas le droit de diviser par zéro. Du coup, si je veux prendre l'inverse d'un nombre, je vais diviser ce nombre par zéro, et du coup ça marche pas bien. La fonction inverse est donc définie pour tout nombre, sauf zéro. L'ensemble de tous les nombres réels sauf zéro s'écrit de deux manières en maths : $\mathbf{R}^*$ et $\mathbf{R}^{\mathrm{o}}$. J'accepte les deux, mais ai appris avec la première version, du coup c'est celle-là qu'est dans le cours. On définit donc la fonction inverse comme suit :

$$\begin{aligned} \text{Inverse : } \quad \mathbf{R}^* &\rightarrow \mathbf{R} \\ x &\rightarrow \tfrac{1}{x} \end{aligned}$$

3.1.2 Parité

Une propriété importante de la fonction inverse est qu'elle est *impaire*. C'est à dire que si je prends *l'opposé* d'un *argument*, son *image* par la fonction est l'opposé de celle du nombre de départ. En termes mathématiques :

$$\text{Inverse}(-x) = -\text{Inverse}(x)$$

En termes d'exemple numérique, ça veut dire que Inverse$(-0.2) = -$Inverse(0.2). Ou $1/(-0.2) = -1/0.2$. C'a l'air d'être un détail, mais ç'a une conséquence importante ! L'*origine* du repère est un *centre de symétrie* de la représentation graphique de la fonction. Du coup, si on trace la partie positive de la fonction, on n'a qu'à recopier le dessin en bas à gauche pour ce qui est en haut à droite, en mode miroir !

3.1.3 Réciprocité

Reconnaissons-le, c'est une propriété assez rare des fonctions, du coup on en parle d'autant plus rarement. Mais c'est tellement pratique…et simple ! Regardons ce qui se passe quand j'applique *deux fois* la fonction inverse :

$$\text{Inverse}(\text{Inverse}(x)) = \text{Inverse}(\frac{1}{x}) = x$$

Comme je reviens sur le nombre de départ, je comprends que *la fonction est sa propre réciproque*. En d'autres termes, si je nomme $y = 1/x$, j'ai, tout le temps $x = 1/y$.

Trouver x à partir de y c'est exactement le même travail que de trouver y à partir de x.

Exercice facile : compléter le tableau de valeurs de la fonction Inverse suivant :

x	y
-5	
	-5
3	
	-3

3.2 5TI : automatiser le tableau de valeurs, avec Gnuplot

Gnuplot est un logiciel libre de création de graphiques en ligne de commande. Si cette idée peut sembler saugrenue, elle convient diablement aux grands ensembles de données : en effet, si la machine n'a pas besoin d'allouer de ressources à une interface graphique, elle peut tout donner pour faire de jolis graphiques rapidement.

Un autre intérêt de la possibilité d'appeler ce programme en ligne de commande est l'interopérabilité avec la programmation, typiquement l'usage de la commande *system* en C, qui agit comme une entrée de terminal. On peut imaginer par exemple un programme qui, à partir de données météo captées en direct, porte en graphique la température, l'humidité...directement à partir des informations du capteur.

Ici, notre projet est simple : nous voulons la représentation graphique d'une fonction mathémtique donnée. On peut donc, dans le notepad, écrire le script suivant à l'intention de gnuplot (téléchargeable sur sourceforge) :

```
set terminal pdf
set output 'inverse.pdf'
set xrange [-1 :1]
set yrange [-10 :10]
set grid
plot 1/x with points
```

Pour qui parle anglais, la syntaxe est assez claire ! Enregistrer ce fichier dans 'inverse.plot' et taper l'invite de terminal 'gnuplot inverse.plot' créée le PDF dont le contenu est représenté figure 9

3.3 Fonction inverse : représentation graphique, par gnuplot

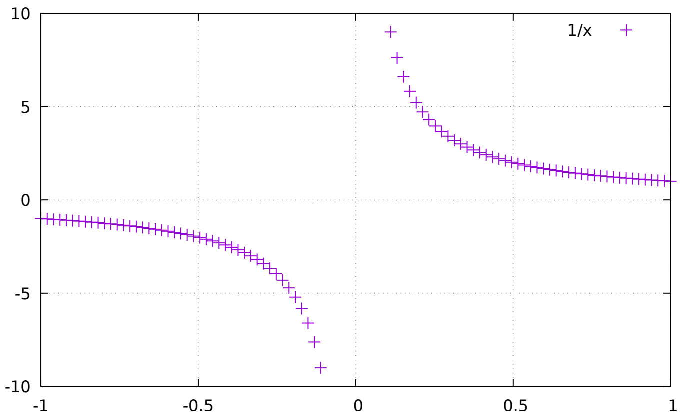

FIGURE 9 – Fonction inverse, par gnuplot